Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy

KATALOG POŽADAVKŮ K MATURITNÍ ZKOUŠCE

MATEMATIKA 2

ZKOUŠKA ZADÁVANÁ MINISTERSTVEM ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Zpracoval: ÚIV – CENTRUM PRO ZJIŠŤOVÁNÍ VÝSLEDKŮ VZDĚLÁVÁNÍ

Schválilo Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy dne 4. 10. 2005 pod č. j. 26 674/05-2/20
s účinností od školního roku 2007/2008

OBSAH

ÚVOD

Účel a obsah katalogu

Účelem Katalogu požadavků k maturitní zkoušce – matematika 2 je poskytnout všem jeho uživatelům informace o požadavcích kladených na žáky vzdělávacích programů v oborech vzdělání vedoucích k dosažení středního vzdělání s maturitní zkouškou.
Matematika 2 zadávaná Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy může být součástí povinných zkoušek v profilové části maturity, určí-li tak ředitel školy. Je rovněž vždy součástí nabídky nepovinných předmětů.

Pedagogické dokumenty ke katalogu a k maturitní zkoušce

Požadavky zařazené do tohoto katalogu vycházejí z platných pedagogických dokumentů:

(1) Učební dokumenty pro gymnázia. (Schválilo MŠMT ČR s platností od 1. 9. 1999) Praha, Fortuna 1999.
(2) Standard vzdělávání ve čtyřletém gymnáziu. (Věstník MŠMT ČR, ročník LII, sešit 4, duben 1996, oblast matematiky a informatiky, 17–19)
(3) Platné učební osnovy matematiky pro studijní obory SOŠ a SOU.

Zpracovatelé katalogu využili jako podpůrné prameny také publikované standardy a didaktické materiály.[1]

Protože zkouška matematika 2 zadávaná MŠMT by měla zajišťovat dostatečnou matematickou připravenost žáka pro další studium na vysokých školách, byly po dohodě v katalogovém týmu mezi maturitní požadavky zařazeny i tematické celky, které figurují v současných platných učebních dokumentech jako **doporučené učivo**.

[1]

(1) FUCHS, E., BINTEROVÁ, H. a kol. Standardy a testové úlohy z matematiky pro střední odborná učiliště. Praha: Prometheus, 2003, ISBN 80-7196-294-5
(2) FUCHS, E., KUBÁT, J. a kol.. Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia. Praha: Prometheus, 1998. ISBN 80-7196-095-0.
(3) FUCHS, E., PROCHÁZKA, F. a kol. Standardy a testové úlohy z matematiky pro střední odborné školy. Praha: Prometheus, 1998. ISBN 80-7196-097-7.
(4) Měření vědomostí a dovedností – nová koncepce hodnocení žáků. Praha: ÚIV, 1999. 78 s. ISBN 80-211-0333-7. Přel. z: Measuring Student Knowledge and Skills. Paris: OECD, 1999. 82 pp.

OČEKÁVANÉ ZNALOSTI A DOVEDNOSTI (CÍLOVÉ KOMPETENCE)

Očekávané znalosti a dovednosti pro zkoušku matematika 2 jsou rozděleny do následujících pěti hlavních kategorií:

A – Osvojení matematických pojmů a dovedností
B – Matematické modelování
C – Vymezení a řešení problému
D – Komunikace
E – Užití pomůcek

V podrobnějším členění patří do jednotlivých kategorií tyto očekávané znalosti a dovednosti:

<u>A – Osvojení matematických pojmů a dovedností</u>

Žák dovede:

Aa Užívat správně matematické pojmy
- definovat pojmy a určit jejich obsah
- charakterizovat pojem různými způsoby
- třídit pojmy a nalézat vztahy mezi nimi
- zobecňovat pojmy a vztahy mezi nimi

Ab Numericky počítat a užívat proměnnou
- provádět základní početní operace
- odhadnout výsledek výpočtu
- využít efektivní způsoby výpočtu
- upravit výrazy s čísly a proměnnými
- stanovit definiční obor výrazu
- na základě reálné situace sestavit výraz s proměnnými

Ac Pracovat s rovinnými a prostorovými útvary
- rozpoznat a pojmenovat geometrické útvary
- využívat geometrickou představivost při analýze rovinných a prostorových vztahů
- měřit a odhadovat výsledek měření
- řešit početně geometrickou úlohu
- řešit konstrukčně geometrickou úlohu

Ad Matematicky argumentovat
- rozlišit různé typy tvrzení (definice, věta)
- rozumět logické stavbě matematické věty
- dokázat jednoduchou matematickou větu
- vytvořit, ověřit, zdůvodnit nebo vyvrátit hypotézu

B – Matematické modelování

Žák dovede:

Ba Matematizovat reálné situace

- odhalit kvantitativní nebo prostorové vztahy a zákonitosti
- vytvořit matematický model reálné situace

Bb Pracovat s matematickým modelem

Bc Ověřit vytvořený model z hlediska reálné situace

- vyjádřit výsledek řešení modelu v kontextu reálné situace
- vyhodnotit výsledek modelované situace

Bd Kombinovat různé modely téže situace

C – Vymezení a řešení problému

Žák dovede:

Ca Vymezit problém

Cb Analyzovat problém

Cc Zvolit vhodnou metodu řešení problému

- popsat problém vzorcem
- užít známý algoritmus
- vytvořit algoritmus řešení

Cd Vyřešit problém

Ce Diskutovat o výsledcích

Cf Aplikovat osvojené metody řešení problémů v jiných tématech a oblastech

D – Komunikace

Žák dovede:

Da Číst s porozuměním matematický text

Db Vyhodnotit informace kvantitativního i kvalitativního charakteru obsažené v grafech, diagramech, tabulkách atd.

Dc Přesně se vyjádřit

- užívat jazyk matematiky včetně symboliky a terminologie
- zdůvodnit matematické tvrzení
- obhájit vlastní řešení problému
- prezentovat výsledky řešení úlohy (geometrické konstrukce) na dobré grafické úrovni

Dd Prezentovat získané informace a výsledky

- zpracovat získané údaje formou grafů, diagramů, tabulek atd.
- použít různé formy znázornění matematických situací

E – Užití pomůcek

Žák dovede:

Ea Využít informační zdroje (odborná literatura, internet atd.)

Eb Efektivně řešit problémy pomocí kalkulátoru a PC

Ec Použít kalkulátor a PC k prezentaci řešení problémů

Ed Použít tradiční prostředky grafického vyjadřování

MATURITNÍ POŽADAVKY (SPECIFICKÉ CÍLE) KE ZKOUŠCE MATEMATIKA 2 ZADÁVANÉ MINISTERSTVEM ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Maturitní požadavky představují konkrétní požadavky k maturitní zkoušce matematika 2. Vznikly promítnutím očekávaných znalostí a dovedností do tematických okruhů a jsou podle jednotlivých tematických okruhů členěny.

1. Číselné obory

Žák dovede:

1.1 Přirozená čísla

- provádět aritmetické operace s přirozenými čísly
- rozlišit prvočíslo a číslo složené, rozložit přirozené číslo na prvočinitele
- užít pojem dělitelnosti přirozených čísel a znaky dělitelnosti
- určit největší společný dělitel a nejmenší společný násobek přirozených čísel

1.2 Celá čísla

- provádět aritmetické operace s celými čísly
- užít pojem opačné číslo

1.3 Racionální čísla

- pracovat s různými tvary zápisu racionálního čísla a jejich převody
- použít zkrácený a rozvinutý tvar desetinného čísla, určit řád čísla
- provádět operace se zlomky
- provádět operace s desetinnými čísly včetně zaokrouhlování
- znázornit racionální číslo na číselné ose

1.4 Reálná čísla

- zařadit číslo do příslušného číselného oboru
- provádět aritmetické operace v číselných oborech
- užít pojmy opačné číslo a převrácené číslo
- řešit praktické úlohy na procenta a užitím trojčlenky
- znázornit reálné číslo nebo jeho aproximaci na číselné ose
- určit absolutní hodnotu reálného čísla a chápat její geometrický význam
- zapisovat a znázorňovat intervaly, jejich průnik, sjednocení a doplněk
- užít druhé a třetí mocniny a odmocniny
- provádět operace s mocninami s celočíselným exponentem
- užít mocninu s racionálním exponentem a ovládat početní výkony s mocninami a odmocninami

1.5 Komplexní čísla

- užít Gaussovu rovinu k zobrazení komplexních čísel
- vyjádřit komplexní číslo v algebraickém i goniometrickém tvaru
- vypočítat absolutní hodnotu a argument komplexního čísla a chápat jejich geometrický význam
- sčítat, odčítat, násobit a dělit komplexní čísla v algebraickém tvaru
- násobit, dělit, umocňovat a odmocňovat komplexní čísla v goniometrickém tvaru užitím Moivreovy věty

---

2. Algebraické výrazy

Žák dovede:

2.1 Mnohočleny

- provádět početní operace s mnohočleny
- rozložit mnohočlen na součin užitím vzorců a vytýkáním

2.2 Lomené výrazy

- provádět operace s lomenými výrazy
- stanovit definiční obor lomeného výrazu

2.3 Výrazy s mocninami a odmocninami

- provádět operace s výrazy obsahujícími mocniny a odmocniny

---

3. Rovnice a nerovnice

Žák dovede:

3.1 Lineární rovnice a jejich soustavy, rovnice s neznámou ve jmenovateli

- stanovit definiční obor rovnice
- řešit lineární rovnice o jedné neznámé a rovnice s neznámou ve jmenovateli
- řešit rovnice obsahující výrazy s neznámou v absolutní hodnotě
- vyjádřit neznámou ze vzorce
- užít rovnice při řešení slovní úlohy
- řešit rovnice s parametrem
- řešit početně i graficky soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých
- řešit soustavy tří lineárních rovnic o třech neznámých

3.2 Kvadratické rovnice

- řešit neúplné i úplné kvadratické rovnice
- užít vztahy mezi kořeny a koeficienty kvadratické rovnice
- užít kvadratickou rovnici při řešení slovní úlohy
- řešit kvadratické rovnice s parametrem
- řešit kvadratické rovnice s reálnými koeficienty v oboru komplexních čísel
- řešit soustavy lineární a kvadratické rovnice o dvou neznámých

3.3 Rovnice s neznámou pod odmocninou

- řešit rovnice s neznámou pod odmocninou, při řešení rovnic rozlišit ekvivalentní a neekvivalentní úpravy

3.4 Lineární a kvadratické nerovnice a jejich soustavy

- řešit lineární nerovnice s jednou neznámou a jejich soustavy
- řešit rovnice a nerovnice v součinovém a podílovém tvaru
- řešit nerovnice obsahující lineární výrazy s neznámou v absolutní hodnotě
- řešit početně i graficky kvadratické nerovnice

---

4. Funkce

Žák dovede:

4.1 Základní poznatky o funkcích

- užít různá zadání funkce v množině reálných čísel a chápat pojmy: definiční obor, obor hodnot, hodnota funkce v bodě, graf funkce
- rozhodnout, zda je funkce sudá nebo lichá, prostá, omezená, periodická, stanovit definiční obory a obory hodnot funkcí, intervaly monotonie a body, v nichž funkce nabývá lokální a globální extrémy
- načrtnout z grafu funkce $y = f(x)$ graf funkcí $y = f(x - m) + n$, $y = |f(x)|$, $y = f(|x|)$
- určit funkci inverzní k dané funkci (načrtnout její graf), užít poznatky o složené funkci
- modelovat reálné závislosti pomocí funkcí
- určit průsečíky grafu funkce s osami soustavy souřadnic

4.2 Lineární funkce

- určit lineární funkci, načrtnout její graf, chápat geometrický význam parametrů a, b v předpisu funkce $y = ax + b$
- užít pojem a vlastnosti přímé úměrnosti
- určit předpis lineární funkce z daných bodů nebo grafu funkce
- sestrojit graf lineární funkce s absolutními hodnotami

4.3 Kvadratické funkce

- určit kvadratickou funkci, její graf, definiční obor a obor hodnot, intervaly monotonie
- vysvětlit význam parametrů v předpisu kvadratické funkce, určit souřadnice bodu, v němž nabývá funkce extrému
- řešit reálné problémy pomocí kvadratické funkce
- načrtnout graf kvadratické funkce s absolutní hodnotou

4.4 Mocninné funkce

- určit definiční obor a obor hodnot, intervaly monotonie, načrtnout graf mocninné funkce s celým exponentem a funkce druhá a třetí odmocnina

4.5 Lineární lomené funkce

- určit lineární lomenou funkci, její definiční obor a obor hodnot, intervaly monotonie, načrtnout její graf
- užít vlastností nepřímé úměrnosti, načrtnout graf lineární lomené funkce posunutím grafu nepřímé úměrnosti

4.6 Exponenciální a logaritmické funkce, rovnice a nerovnice

- určit exponenciální a logaritmickou funkci jako funkce navzájem inverzní, stanovit jejich definiční obor a obor hodnot, typ monotonie, načrtnout jejich graf
- užít logaritmu a jeho vlastností, řešit exponenciální a logaritmické rovnice a jednoduché nerovnice
- aplikovat poznatky o exponenciálních a logaritmických funkcích při řešení reálných problémů

4.7 Goniometrické funkce, rovnice a nerovnice

- užít pojmu orientovaný úhel a jeho velikosti v míře stupňové a obloukové
- definovat goniometrické funkce v pravoúhlém trojúhelníku
- definovat goniometrické funkce v oboru reálných čísel, užít jednotkové kružnice
- načrtnout grafy goniometrických funkcí $y=f(x)$ a grafy funkcí $y=a\cdot f(bx+c)+d$, určit jejich definiční obor, obor hodnot, užít vlastností
- užít vztahy mezi goniometrickými funkcemi
- řešit goniometrické rovnice a jednoduché nerovnice

5. Posloupnosti a řady

Žák dovede:

5.1 Základní poznatky o posloupnostech

- aplikovat znalosti o funkcích při úvahách a řešení úloh o posloupnostech
- určit posloupnost vzorcem pro n-tý člen, rekurentně, graficky

5.2 Aritmetická posloupnost

- určit aritmetickou posloupnost a používat pojem diference
- užít základní vzorce pro aritmetickou posloupnost

5.3 Geometrická posloupnost

- určit geometrickou posloupnost a používat pojem kvocient
- užít základní vzorce pro geometrickou posloupnost

5.4 Limita posloupnosti a nekonečná geometrická řada

- s porozuměním užívat pojmy vlastní a nevlastní limita posloupnosti, konvergentní a divergentní posloupnost
- využít věty o limitách posloupnosti k výpočtu limity posloupnosti
- určit podmínky konvergence nekonečné geometrické řady a vypočítat její součet

5.5 Využití posloupností pro řešení úloh z praxe

- využít poznatků o posloupnostech v reálných situacích, zejména v úlohách finanční matematiky a dalších praktických problémech

---

6. Planimetrie

Žák dovede:

6.1 Planimetrické pojmy a poznatky

- správně užít pojmy bod, přímka, polopřímka, rovina, polorovina, úsečka, úhly – vedlejší, vrcholové, střídavé, souhlasné, středové a obvodové, znázornit objekty
- užít s porozuměním polohové a metrické vztahy mezi geometrickými útvary v rovině (rovnoběžnost, kolmost a odchylka přímek, délka úsečky a velikost úhlu, vzdálenosti bodů a přímek)
- rozlišit konvexní a nekonvexní útvary, popsat a správně užívat jejich vlastnosti
- při řešení úloh využívat množiny bodů dané vlastnosti

6.2 Trojúhelníky

- pojmenovat základní objekty v trojúhelníku, správně užít jejich vlastností, pojmů užívat s porozuměním (strany, vnitřní a vnější úhly, osy stran a úhlů, výšky, těžnice, střední příčky, kružnice opsaná a vepsaná)
- při řešení úloh argumentovat s využitím poznatků vět o shodnosti a podobnosti trojúhelníků
- aplikovat poznatky o trojúhelnících (obvod, obsah, výška, Pythagorova a Euklidovy věty, poznatky o těžnicích a těžišti) v úlohách početní geometrie
- aplikovat poznatky o trojúhelnících v úlohách konstrukční geometrie
- řešit praktické úlohy užitím trigonometrie pravoúhlého a obecného trojúhelníku

6.3 Mnohoúhelníky

- rozlišit základní druhy čtyřúhelníků, popsat a správně užít jejich vlastnosti (různoběžníky, rovnoběžníky, lichoběžníky), pravidelné mnohoúhelníky
- pojmenovat, znázornit a správně užít základní objekty ve čtyřúhelníku a dalších mnohoúhelnících, popsat a užít jejich vlastnosti (strany, vnitřní a vnější úhly, osy stran a úhlů, kružnice opsaná a vepsaná, úhlopříčky, výšky)
- užít poznatky o mnohoúhelnících (obvod, obsah, vlastnosti úhlopříček a kružnice opsaná nebo vepsaná) v úlohách početní geometrie
- využít poznatky o mnohoúhelnících v úlohách konstrukční geometrie

6.4 Kružnice a kruh

- pojmenovat, znázornit a správně užít základní objekty v kružnici a kruhu, popsat a užít jejich vlastnosti (tětiva, kružnicový oblouk, kruhová výseč a úseč, mezikruží)
- užít polohové vztahy mezi body, přímkami a kružnicemi
- aplikovat metrické poznatky o kružnicích a kruzích (obvod, obsah, velikost obvodového a středového úhlu) v úlohách početní geometrie
- aplikovat poznatky o kružnici a kruhu v úlohách konstrukční geometrie

6.5 Geometrická zobrazení

- popsat a určit shodná zobrazení (souměrnosti, posunutí, otočení) a užít jejich vlastnosti
- popsat a určit stejnolehlost nebo podobnost útvarů a užít jejich vlastnosti
- aplikovat poznatky o shodnosti a podobnosti v úlohách konstrukční geometrie

---

7. Stereometrie

Žák dovede:

7.1 Polohové vlastnosti útvarů v prostoru

- určit vzájemnou polohu bodů, přímek, přímky a roviny, rovin
- rozhodnout o kolmosti nebo rovnoběžnosti přímek a rovin
- zobrazit jednoduchá tělesa ve volném rovnoběžném promítání
- konstruovat rovinné řezy hranolu a jehlanu

7.2 Metrické vlastnosti útvarů v prostoru

- určit vzdálenost bodu od přímky a roviny, odchylku dvou přímek, přímky a roviny, dvou rovin

7.3 Tělesa

- charakterizovat jednotlivá tělesa, vypočítat jejich objem a povrch (krychle, kvádr, hranol, jehlan, rotační válec, rotační kužel, komolý jehlan a kužel, koule a její části)
- využít poznatků o tělesech v praktických úlohách

---

8. Analytická geometrie

Žák dovede:

8.1 Souřadnice bodu a vektoru v rovině i prostoru

- určit vzdálenost dvou bodů a souřadnice středu úsečky
- užít pojmy: vektor a jeho umístění, souřadnice vektoru a velikost vektoru
- provádět operace s vektory (součet vektorů, násobek vektoru reálným číslem, skalární a vektorový součin vektorů)
- určit velikost úhlu dvou vektorů

8.2 Přímka a rovina

- užít parametrické vyjádření přímky v rovině a prostoru, obecnou rovnici přímky a směrnicový tvar rovnice přímky v rovině
- užít parametrické vyjádření roviny a obecnou rovnici roviny
- určit a aplikovat v úlohách polohové a metrické vztahy bodů, přímek a rovin

8.3 Kuželosečky

- charakterizovat jednotlivé druhy kuželoseček, použít jejich vlastnosti a analytické vyjádření.
- určit vzájemnou polohu přímky a kuželosečky

---

9. Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika

Žák dovede:

9.1 Kombinatorika

- rozpoznat kombinatorické skupiny (variace s opakováním, variace, permutace, a kombinace bez opakování), určit jejich počty a užít v reálných situacích
- počítat s faktoriály a kombinačními čísly
- užít binomickou větu při řešení úloh

9.2 Pravděpodobnost

- použít pojmy náhodný jev, jistý jev, nemožný jev, opačný jev, nezávislost jevů, sjednocení a průnik jevů
- určit pravděpodobnost náhodného jevu, vypočítat pravděpodobnost sjednocení nebo průniku dvou jevů

9.3 Statistika

- vysvětlit a použít pojmy statistický soubor, rozsah souboru, statistická jednotka, statistický znak, absolutní a relativní četnost
- vyhledat a vyhodnotit statistická data v grafech a tabulkách
- sestavit tabulku četností a graficky znázornit rozdělení četností
- určit charakteristiky polohy a variability (průměry, modus, medián, rozptyl, směrodatná odchylka)

OBECNÁ SPECIFIKACE ZKOUŠKY Z MATEMATIKY 2 ZADÁVANÉ MŠMT

Maturitní zkouška matematika 2 zadávaná MŠMT bude ověřovat matematické znalosti a dovednosti žáků formou testu, který bude tvořen úlohami uzavřenými, otevřenými se stručnou odpovědí a několika otevřenými úlohami s širokou odpovědí. Test bude trvat 120 minut. V jeho průběhu budou mít žáci k dispozici Matematické, fyzikální a chemické tabulky pro střední školy, budou moci používat kalkulátor bez grafického režimu a rýsovací potřeby. Následující tabulka uvádí přibližné procentuální zastoupení jednotlivých témat v testu.

Tematické okruhy		**%**
1.	Číselné množiny	5–10
2.	Algebraické výrazy	10–20
3.	Rovnice a nerovnice	15–25
4.	Funkce	10–20
5.	Posloupnosti a řady	5–10
6.	Planimetrie	10–15
7.	Stereometrie	5–15
8.	Analytická geometrie	10–20
9.	Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika	5–10

PŘÍKLADY TESTOVÝCH ÚLOH

Testové úlohy jsou uvedeny jen jako samostatné ukázky, jejich zastoupení necharakterizuje strukturu testu. **Soubor ukázek proto nelze považovat za sestavený test.**
V ukázkách uzavřených úloh jsou autorská řešení označena tučnou sazbou správné odpovědi.
Další příklady testových úloh lze najít v souborech úloh zadávaných Centrem pro zjišťování výsledků vzdělávání v rámci přípravných programů na reformu maturitní zkoušky v letech 2001–2005 (ke stažení na www.cermat.cz, případně o ně lze požádat předmětové koordinátorky matematiky Centra pro zjišťování výsledků vzdělávání).

1. Číselné množiny

Úloha 1

Na divadelní představení byly zakoupeny dva druhy vstupenek. Jistý počet vstupenek prvního druhu za 48 Kč a o pět vstupenek po 68 Kč více. Za vstupenky bylo celkem zaplaceno 1 500 Kč. Kolik vstupenek každého druhu bylo zakoupeno?

Výsledek: 10 a 15.

Úloha 2

Výnosy z vkladní knížky jsou sníženy vždy o 15% daň. Vklad ve výši 55 000 Kč vynesl za rok čistý úrok 3 740 Kč. Jaká byla roční úroková míra? Výsledek zaokrouhlete na desetiny procenta.

Výsledek: 8,0 %

Úloha 3

Vypočítejte $\dfrac{\left(15^{\frac{1}{3}} \cdot 27^{\frac{1}{2}}\right)^{-3}}{\left(25^{\frac{1}{4}} \cdot 9^{\frac{1}{8}}\right)^{-2}} : \dfrac{\sqrt{\sqrt[3]{9}}}{\sqrt[3]{3\sqrt[4]{27}}}$ a výsledek zapište pomocí mocnin s racionálním exponentem.

Výsledek: $3^{-\frac{19}{4}}$

Úloha 4

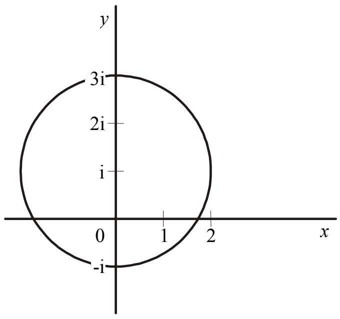
Kolejnice délky 25 m se při zvýšení teploty vzduchu o 20 °C prodlouží o 6 mm. Nejnižší teplota (-15) °C byla naměřena 12. února a nejvyšší teplota 35 °C 18. července téhož roku. Jaký byl největší rozdíl v délkách této kolejnice v průběhu roku?

A) 6 mm
B) 12 mm
C) 15 mm
D) 18 mm

Úloha 5

V Gaussově rovině zobrazte všechna komplexní čísla z, pro která platí: $|z - \mathrm{i}| = 2$.

Výsledek:



Úloha 6

Výraz $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)^5$ je roven:

A) $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

B) $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$

C) $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

D) $\boldsymbol{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}}$

2. Algebraické výrazy

Úloha 1

Rovnost $(x^2+1)(x-a)+2=x^3+3x^2+x+b$ platí pro všechna $x \in \mathbf{R}$.

Určete hodnoty parametrů a, b.

Výsledek: $a = -3$, $b = 5$

Úloha 2

Upravte výraz $\dfrac{x^3+x^2-4x-4}{x^2-x-2}$ a určete jeho definiční obor.

Výsledek: $x+2$; $\mathbf{R} \setminus \{-1, 2\}$

Úloha 3

Výraz $\dfrac{x+2\sqrt{xy}+y}{x+y} : \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$ lze pro všechna $x > 0$, $y > 0$ upravit na tvar:

A) $\dfrac{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}{xy}$

B) $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{xy}}$

C) $\sqrt{x}+\sqrt{y}$

D) $x\sqrt{y}+y\sqrt{x}$

Úloha 4

Rozhodněte, zda jsou následující tvrzení pravdivá (ANO), nebo nepravdivá (NE).

4.1 Pro libovolná dvě reálná čísla a, b platí $|a-b| = |b-a|$. (ANO–NE)

4.2 $\dfrac{2^{500}+2^{502}}{2} = 5 \cdot 2^{499}$ (ANO–NE)

4.3 Pro každá dvě nezáporná čísla a, b platí $\sqrt{a+b} = a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}$. (ANO–NE)

4.4 $\dbinom{80}{25} - \dbinom{80}{35} + \dbinom{80}{45} - \dbinom{80}{55} = 0$ (ANO–NE)

Výsledek: ANO, ANO, NE, ANO

3. Rovnice a nerovnice

Úloha 1

Na cestě mezi městy A a C leží město B. Vzdálenost měst A, B je 10 km a vzdálenost měst B, C je 50 km. Z měst A a B současně vyjeli dva cyklisté směrem k městu C. Rychlost cyklisty vyjíždějícího z města A byla 25 km.h^{-1}, rychlost cyklisty vyjíždějícího z města B 20 km.h^{-1}. První dohonil druhého. Ve které vzdálenosti od města A to bylo?

A) 45 km
B) 50 km
C) 55 km
D) 60 km

Úloha 2

Řešte v **R** rovnici $\frac{x+3}{x-3}+\frac{x-1}{x-5}=4$.

Výsledek: $x_1 = 9$, $x_2 = 4$

Úloha 3

Řešte v **R** nerovnici $x^2+4x-8<|x+2|$.

Výsledek: $(-6, 2)$

Úloha 4

Kvadratická rovnice $x^2-2x(1+m)+3m+7=0$ s parametrem $m \in \mathbf{R}$ má imaginární kořeny pro:

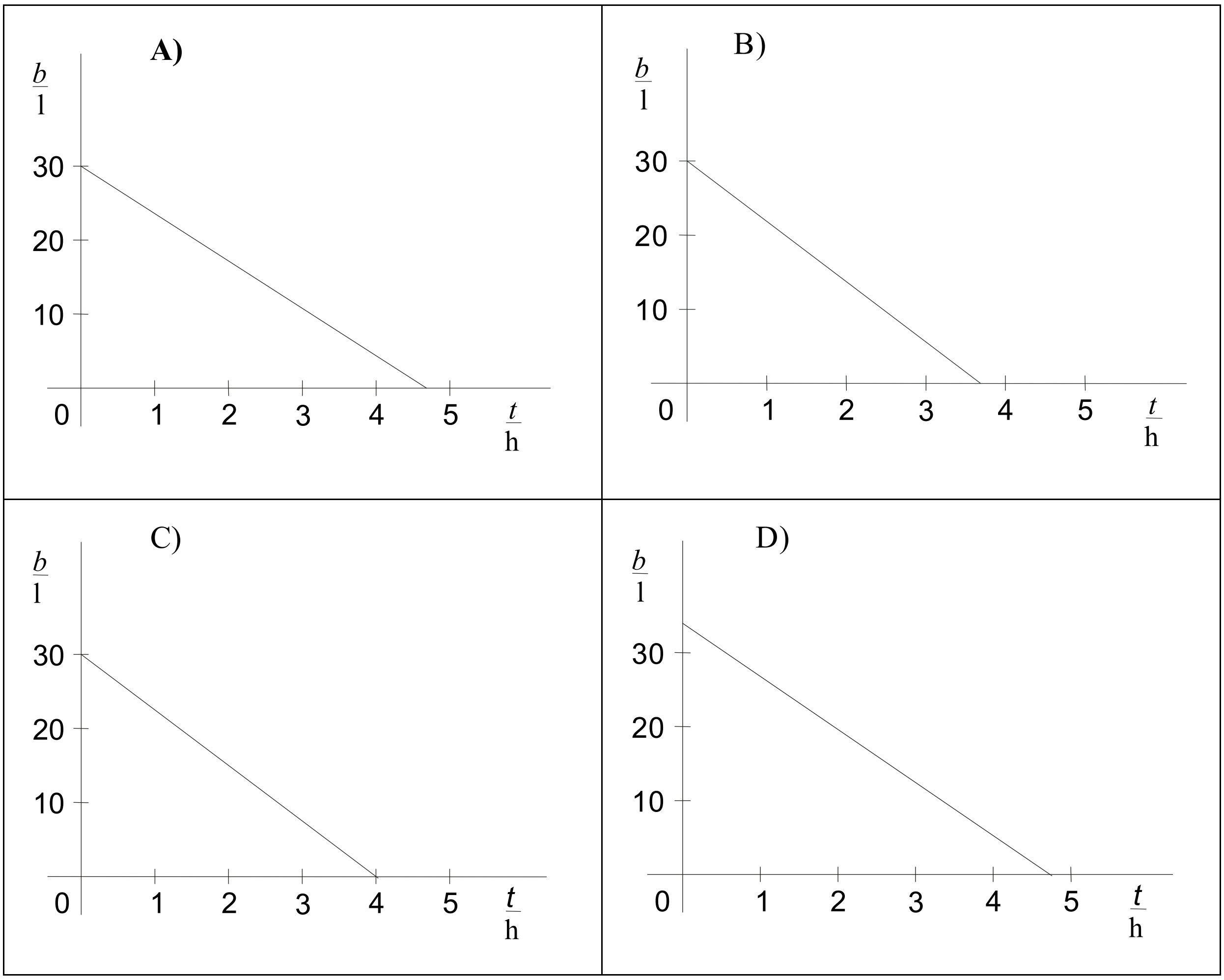
A) $m \in \langle -2,3 \rangle$
B) $m \in (-\infty,-2) \cup (3,+\infty)$
C) $m \in \{-2,3\}$
D) $\boldsymbol{m \in (-2,3)}$

---

4. Funkce

Úloha 1

Automobil má na počátku jízdy 30 litrů benzinu v nádrži. Průměrná spotřeba je 8 litrů na 100 km. Automobil jede po dálnici průměrnou rychlostí 80 km.h^{-1}. Který z grafů by mohl znázorňovat lineární funkci, která určuje závislost objemu benzinu v nádrži b (v litrech) na době jízdy auta t (v hodinách)?



Úloha 2

Teplota se měří v Celsiových nebo Fahrenheitových stupních. Teplota f ve Fahrenheitových stupních je lineární funkcí teploty c v Celsiových stupních. Přitom hodnotě 8 °C odpovídá 46,4 °F a 24 °C odpovídá 75,2 °F. Určete hodnotu ve Fahrenheitových stupních, která odpovídá 20 °C.

Výsledek: 68,0 °F

Úloha 3

Závislost hmotnosti m radioaktivní látky na čase t při její radioaktivní přeměně je dána vzorcem $m = m_0 \cdot 0{,}5^{\frac{t}{T}}$, kde m_0 značí počáteční hmotnost látky v čase $t = 0$ a T je tzv. poločas přeměny (doba, za kterou se m_0 zmenší na polovinu). Poločas přeměny radionuklidu jodu ^{131}I je 8 dní. Vypočítejte hmotnost zbylého radionuklidu za 5 dní, jestliže $m_0 = 0{,}1$ g.

A) 65 mg
B) 6,5 mg
C) 0,65 mg
D) 0,065 mg

Úloha 4

Řešte následující nerovnice v daných oborech a výsledek zapište intervalem.

4.1 $3 - x \geq -3$ pro $x \in \langle -10, 10 \rangle$

4.2 $x^2 \leq x$ pro $x \in \mathbf{R}$

4.3 $\log_3 x \geq 0$ pro $x \in \mathbf{R}$

4.4 $\cos x < \sin x$ pro $x \in \langle 0, 2\pi)$

Výsledky: $x \in \langle -10; 6 \rangle$, $x \in \langle 0; 1 \rangle$, $x \in \langle 1; \infty)$, $x \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4} \right)$

5. Posloupnosti a řady

Úloha 1

Firma zvyšovala za posledních pět let výrobu každý rok o 10 % oproti předcházejícímu roku. O kolik procent firma zvýšila výrobu za posledních pět let? Výsledek zaokrouhlete na celá procenta.

Výsledek: 61 %

Úloha 2

V posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je $a_1 = 0$, $a_2 = 2$ a pro všechna $n \in \mathbf{N}$ platí $a_{n+2} = a_n + 2a_{n+1}$. Šestý člen této posloupnosti je roven:

A) 24
B) 49
C) 52
D) 58

Úloha 3

Přičteme-li k číslům 1, 9, 33 stejné číslo, dostaneme první tři členy geometrické posloupnosti. Určete součet prvních šesti členů této posloupnosti.

Výsledek: 1 456

Úloha 4

Výchozí text k úlohám 4.1 a 4.2

Čísla 1, 26 a 36 jsou tři členy konečné aritmetické posloupnosti. Je mezi nimi uveden první a poslední člen posloupnosti.

4.1

Určete interval, do něhož patří největší možná diference d takové posloupnosti.

A) $(0; 2{,}5)$

B) $\langle 2{,}5; 4)$

C) $\boldsymbol{\langle 4; 5{,}5)}$

D) Do žádného z uvedených intervalů.

4.2

Kolik členů by měla aritmetická posloupnost (viz výchozí text) pro diferenci $d = 0{,}25$?

A) 140
B) 141
C) 147
D) Pro danou diferenci nejsou splněny podmínky v zadání úlohy.

Úloha 5

Pro kterou hodnotu $k \in \mathbf{R}$ je $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{k \cdot n^2 + 4n}{(2n+1)^2} = 2$?

A) 0
B) 2
C) 4
D) 8

Úloha 6

Která z uvedených řad **nemá** součet $\dfrac{1}{2}$?

A) $\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{32} + \dots$

B) $\dfrac{2}{3} - \dfrac{2}{9} + \dfrac{2}{27} - \dfrac{2}{81} + \dots$

C) $\boldsymbol{1 - \dfrac{2}{3} + \dfrac{4}{9} - \dfrac{8}{27} + \dots}$

D) $\dfrac{3}{4} - \dfrac{3}{8} + \dfrac{3}{16} - \dfrac{3}{32} + \dots$

6. Planimetrie

Úloha 1

Kružnice má délku o 10 cm větší, než je obvod pravidelného šestiúhelníku do ní vepsaného. Vypočtěte obsah kruhu, jehož hranici tvoří tato kružnice.

Poznámka: Počítejte s hodnotou $\pi \doteq 3{,}14$.

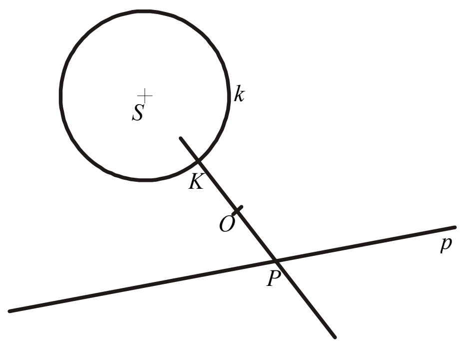
Výsledek: 4 005 cm^2

Úloha 2

Je dána přímka *p*, kružnice *k(S; r)* a bod *O* ($O \notin p \cup k$). Na kružnici *k* určete bod *K* a na přímce *p* bod *P* ($P \neq K$) tak, aby bod *O* byl středem úsečky *KP*.

Řešení úlohy:

Náčrtek:



Rozbor:

K je obrazem *P* ve středové souměrnosti S_0 se středem v *O*

Zápis konstrukce:

1. p'; $p' = S_o(p)$
2. K; $K \in k \cap p'$
3. $\leftrightarrow KO$
4. P; $P \in p \cap \leftrightarrow KO$

Diskuse:

a) $k \cap p' = \emptyset$ … nemá řešení

b) $k \cap p' = \{K\}$ … jedno řešení

c) $k \cap p' = \{K, K'\}$ … dvě řešení

Úloha 3

Velikosti vnitřních úhlů šestiúhelníku tvoří aritmetickou posloupnost. Nejmenší úhel má velikost 70º. Určete velikosti zbývajících vnitřních úhlů.

Výsledek: 90º, 110º, 130º, 150º, 170º

Úloha 4

V rovině ρ jsou umístěny dva různé body P a Q.

V levém sloupci jsou zapsány čtyři různé množiny bodů X roviny ρ.

Ke každé množině zapsané v 4.1 až 4.4 přiřaďte jeden ze šesti obrázků A až F, v němž je příslušná množina zobrazena.

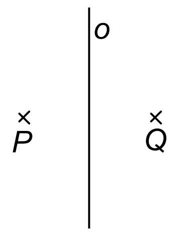
4.1 $\{X \in \rho; |\sphericalangle PXQ| = 90^o\}$

4.2 $\{X \in \rho; |XP| + |XQ| = 2|PQ|\}$

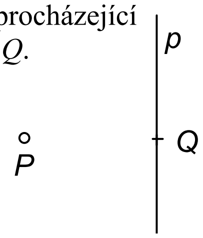
4.3 $\{X \in \rho; |PX|^2 - |QX|^2 = |PQ|^2\}$

4.4 $\{X \in \rho; |XP| - |XQ| = |PQ|\}$

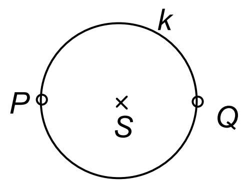
obr. A
Osa o úsečky PQ.



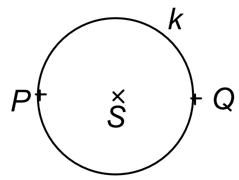
obr. B
Přímka p kolmá k úsečce PQ procházející bodem Q.



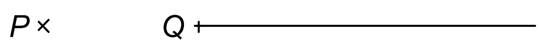
obr.C
Kružnice k s průměrem PQ kromě bodů P a Q.



obr. D
Kružnice k s průměrem PQ.

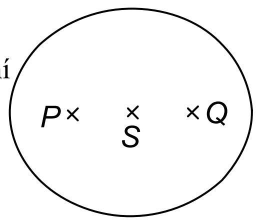


obr. E
Polopřímka opačná k polopřímce QP.



obr. F

Elipsa s ohnisky P, Q a hlavní poloosou délky $|PQ|$.



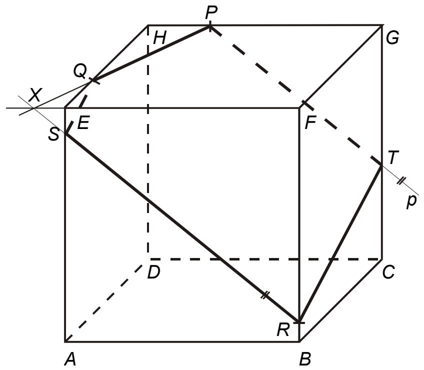
Výsledek: 4.1 C, 4.2 F, 4.3 B, 4.4 E

7. Stereometrie

Úloha 1

V krychli $ABCDEFGH$, kde $|AB|=6$ cm, je bod P vnitřním bodem hrany HG, bod Q vnitřním bodem hrany EH a bod R vnitřním bodem hrany BF. Sestrojte řez krychle rovinou PQR.

Výsledek:



Úloha 2

Pro odstraňování ropných havárií na otevřeném moři se používají speciální hmoty, které jsou schopny svým velkým povrchem absorbovat ropu z mořské hladiny. 1 cm^2 povrchu takové hmoty je schopen absorbovat až 20 g ropy. Z krychle výchozí suroviny o hraně 1 m byla technologickým způsobem bez materiálových ztrát vyrobena směs kuliček o středním průměru 2 mm. Kuliček, které lze připravit za uvedených podmínek, je přibližně:

Poznámka: Počítejte s hodnotou $\pi \doteq 3{,}14$.

A) 240 tisíc
B) 24 milionů
C) 120 milionů
D) 240 milionů

Úloha 3

Určete počet tělesových úhlopříček v konvexním pětibokém kolmém hranolu.

Výsledek: 10

Úloha 4

Je dán pravidelný šestiboký hranol $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ a dvojice rovin:

a) ABC, $D'E'F'$ b) ABB', $CC'F'$ c) BDD', $A'AE$ d) $A'F'F$, EDD'

e) ACF', $A'B'D$

Určete počet dvojic rovin, které **NEJSOU** rovnoběžné.

A) právě jedna
B) právě dvě
C) právě tři
D) více než tři

Úloha 5

V kotli tvaru polokoule o vnitřním průměru 86 cm je hladina vody 5 cm pod okrajem kotle. Kolik litrů vody je v kotli?

Poznámka: Počítejte s hodnotou $\pi \doteq 3{,}14$.

Výsledek: 137,5 l

8. Analytická geometrie

Úloha 1

V rovnoběžníku $ABCD$ je dán střed souměrnosti $S[2;0]$ a vektory $\overrightarrow{AB}=(5;-1)$ a $\overrightarrow{AD}=(1;3)$. Který z uvedených bodů je vrcholem daného rovnoběžníku ?

A) $A[-3;-1]$
B) $B[5;-1]$
C) $\boldsymbol{C[5;1]}$
D) $D[-1;1]$

Úloha 2

Množina vektorů ***c***, kolmých k vektorům ***a*** = (–1; 1; 2) a ***b*** = (–2; 0; 5), je pro $t \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$:

A) $(-5t; t; 2t)$
B) $(-5t; -t; 2t)$
C) $\boldsymbol{(5t; t; 2t)}$
D) $(-2t; t; 5t)$

Úloha 3

Kružnice má střed v bodě S [3; –4] a prochází počátkem soustavy souřadnic. Jaké je její analytické vyjádření?

Výsledek: $x^2+y^2-6x+8y=0$

Úloha 4

Řídící přímka paraboly má rovnici $x = 2$. Ohniskem paraboly je bod F[–4; 2]. Jaká je vrcholová rovnice dané paraboly?

Výsledek: $(y-2)^2=-12(x+1)$

---

9. Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika

Úloha 1

Řešte rovnici: $\binom{x}{2}+\binom{x-1}{2}=x^2$.

Výsledek: rovnice nemá řešení

Úloha 2

Do finále turnaje v žákovské kopané, v němž se utká každé družstvo s každým, se probojovala 4 družstva. Každé utkání bude trvat dvakrát 45 minut a mezi každým poločasem a každým zápasem je desetiminutová přestávka. Jaká je minimální cena, kterou organizátor zaplatí za pronájem hřiště, jestliže za každou započatou hodinu zaplatí 200 Kč?

Výsledek: 2 200 Kč

Úloha 3

Soubor karet je očíslován přirozenými čísly od 1 do 24. Karty zamícháme a jednu z nich náhodně vytáhneme. Určete pravděpodobnost, že číslo karty je dělitelné číslem 4 nebo číslem 6.

Výsledek: $\frac{1}{3}$

Úloha 4

Ve škole jsou 4 třídy druhého ročníku označené písmeny A, B, C, D. V tabulce jsou uvedeny počty žáků a průměrné známky z matematiky v těchto třídách.

Třída	Počet žáků	Průměrná známka z matematiky
A	28	2,51
B	24	2,12
C	32	2,63
D	30	2,41

Vypočtěte průměrnou známku z matematiky žáka ve druhém ročníku této školy.

Výsledek: 2,44